Universiteit Twente
de ondernemende universiteit

Manon Kok

Bepaling van de energie en richting van het primaire deeltje op de Hisparc-website

Stageverslag voor de masteropleiding Applied Physics
Faculteit Technische Natuurwetenschappen
Universiteit Twente

26 september 2008

Inhoudsopgave

1 Inleiding **3**

2 Richtingsbepaling **4**

3 Energiebepaling **10**
3.1 Bepaling van primaire energie bij AGASA 10
3.2 Bepaling van primaire energie bij HiSPARC 12

4 Bepaling van de positie van de showercore **14**
4.1 Bepaling van de positie van de showercore: theorie 14
4.2 Bepaling van de positie van de showercore bij HiSPARC 15

5 Conclusie **20**

Referenties **21**

1 Inleiding

HiSPARC is een project waarbij middelbare scholen samen met wetenschappelijke instellingen een netwerk vormen om kosmische straling met extreem hoge energie te kunnen meten. Kosmische straling kan op aarde niet direct gedetecteerd worden. De straling gaat namelijk eerst door de atmosfeer, waar zij interacties aangaat. De deeltjes die hierbij ontstaan gaan op hun beurt weer interacties aan etc. Op deze manier ontstaat uit één inkomend deeltje in de atmosfeer een shower aan deeltjes die aankomt op het aardoppervlak.

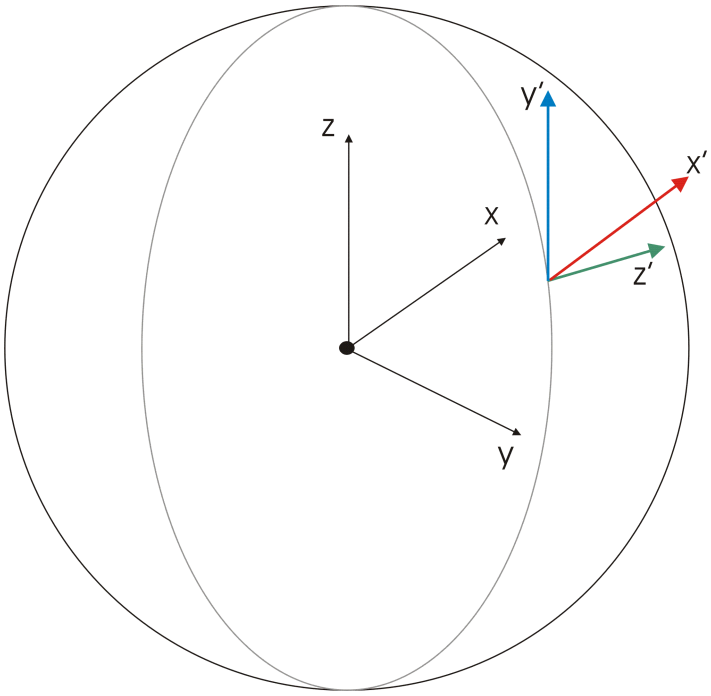
Detectoren kunnen muonen uit deze showers detecteren. Deze detectoren worden op scholen geplaatst, waardoor het mogelijk wordt op veel verschillende plaatsen muonen te detecteren. Meet een detector een hoog genoeg signaal, dan slaat hij dit signaal als een event op in de database. Als meerdere detectoren binnen heel korte tijdsspanne een event registreren, spreken we van een coïncidentie. We verwachten dan dat de gedetecteerde deeltjes van dezelfde shower afkomstig zijn.

Bij iedere coïncidentie kunnen we een aantal interessante vragen stellen: waar bevindt zich het midden van de shower (de showercore), wat is de richting van de shower en wat was de energie van het primaire deeltje. Als we deze drie vragen kunnen beantwoorden, hebben we meer informatie over wat voor deeltje onze atmosfeer binnen is gekomen. Bovendien kunnen we dan middels een sterrenkaart kijken waar het hoog-energetische kosmische deeltje vandaan komt.

Op de HiSPARC-website kunnen coïncidenties worden geanalyseerd zodat antwoorden kunnen worden verkregen op bovenstaande vragen. Deze analyse kan op dit moment alleen worden gedaan voor coïncidenties waarbij 3 detectoren betrokken zijn. Om te beginnen met de analyse wordt de gebruiker gevraagd het aantal muonen dat door iedere detector is gegaan in te voeren. Vervolgens wordt op basis van deze informatie en de posities van de detectoren allereerst de richting van de shower bepaald. Daarna wordt de positie van de showercore en de energie van het primaire deeltje bepaald.

Voor mijn stageonderzoek bij het HiSPARC project heb ik me op twee dingen gericht. Ten eerste ben ik bezig geweest met het opzetten van een nieuwe website waarop informatie over detectoren, events en coincidenties kan worden gevonden. Ten tweede ben ik bezig geweest met de analyse van de coïncidenties, waaruit dit document is voortgekomen.

Omdat er op dit moment weinig documentatie bestaat over hoe de berekeningen aan de coïncidenties worden gedaan, zal ik in dit document een uitgebreide beschrijving hiervan geven. Bovendien zal ik aangeven waar de knelpunten in de berekening liggen en hoe mogelijke verbeteringen kunnen worden doorgevoerd om een betere overeenstemming met simulaties te krijgen. Verder zal ik aangeven hoe de code kan worden uitgebreid zodat het mogelijk wordt ook voor coïncidenties van meer dan 3 detectoren de analyse uit te voeren.



Figuur 1: Overgang van een assenstelsel x, y, z naar een nieuw assenstelstel x', y', z'

2 Richtingsbepaling

Op de HiSPARC-website kunnen coïncidenties met drie betrokken detectoren worden geanalyseerd. In deze analyse van de coïncidenties wordt allereerst de richting van de shower bepaald.

In de database staan de volgende gegevens over de posities van de detectoren opgeslagen: de posities x, y en z en hun laterale en longitudinale posities. Hierbij wijst de z-as naar de noordpool; de x-as wijst naar het snijpunt van de Greenwich meridiaan en de evenaar; de y-as wijst naar 90° oosterlengte. Om de richting van de shower te bepalen worden de x-, y- en z-coördinaten van de detectoren omgeschreven naar een coördinatenstelsel waarbij de assen over het vlak door de detectoren lopen.

Hiertoe wordt allereerst een vlak bepaald dat door de drie punten loopt (de drie detectoren met posities (x,y,z)). Vervolgens wordt een twee-dimensionaal coordinatensysteem (x',y') op het vlak gedefinieerd. De x'-as loopt parallel aan de equator van de aarde, waarbij de positieve richting oostelijk is. De y'-as is vervolgens zo gedefinieerd dat hij loodrecht staat op de x'-as, waarbij de positieve richting noordelijk is. De z'-coordinaat geeft de afstand van het midden van de aarde tot het vlak. Het assenstelsel is te vinden in figuur 1.

Uit de database worden posities x, y en z van de detectoren en de tijdstippen t waarop zij een event registreerden uitgelezen. De x-, y- en z-posities van de verschillende detectoren worden opgeslagen in arrays $x[i]$, $y[i]$ en $z[i]$. Vervolgens worden de relatieve posities $dx[i]$, $dy[i]$ en $dz[i]$ ten opzichte van "detector 0"

bepaald. Detector 0 is één van de drie detectoren; welke hiervoor gekozen wordt heeft geen invloed op de uitkomst van de berekeningen.

Hierna wordt de normaalvector op het vlak door de drie punten (de drie posities van de detectoren) bepaald. Deze vector wijst naar buiten de aarde. Om de normaalvector op een vlak door drie punten te bepalen moet allereerst het uit-product genomen worden van de vector van detector 0 naar detector 1 en de vector van detector 0 naar detector 2. Vervolgens moet de verkregen vector worden genormaliseerd zodat we de normaalvector krijgen. De normaalvector wordt nu gegeven door:

$$\begin{aligned} nx &= \frac{dy[1]dz[2] - dz[1]dy[2]}{\sqrt{nx^2 + ny^2}} \\ ny &= \frac{dz[1]dx[2] - dx[1]dz[2]}{\sqrt{nx^2 + ny^2}} \\ nz &= \frac{dx[1]dy[2] - dy[1]dx[2]}{\sqrt{nx^2 + ny^2}} \end{aligned} \tag{1}$$

Vervolgens worden de posities van de verschillende detectoren in coördinaten x' en y' gegeven door:

$$y'_i = \frac{dz_i}{\sqrt{nx^2 + ny^2}} \tag{2}$$

Als nx niet gelijk is aan nul wordt x' gegeven door:

$$x'_i = \frac{dy_i * \sqrt{nx^2 + ny^2} + y'_i * nz * ny}{nx} \tag{3}$$

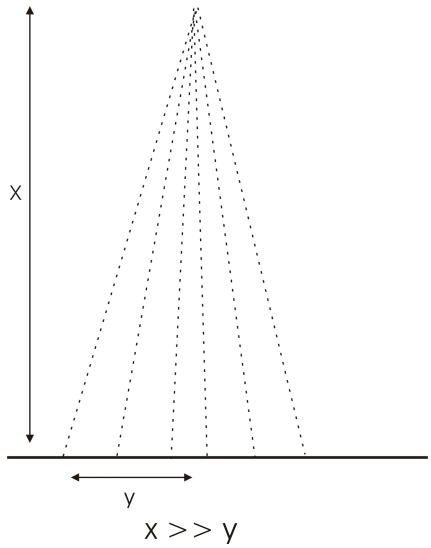
Als nx wel gelijk is aan nul, wordt x' gegeven door:

$$x'_i = \frac{-(dx_i * \sqrt{nx^2 + ny^2} + y'_i * nz * nx)}{ny} \tag{4}$$

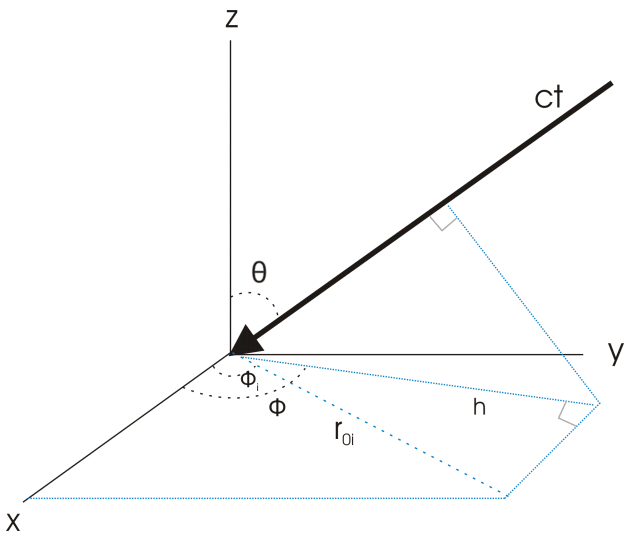
Bepaling van de hoeken θ en ϕ Nu een assenstelsel x', y' en z' is gedefinieerd (vanaf nu gewoon x, y en z genoemd), kan de richting van de shower worden bepaald. Hierbij wordt aangenomen dat de muonen in alle detectoren uit dezelfde richting komen (zie ook figuur 2).

De richting van de shower wordt gedefinieerd in termen van een hoek θ en een hoek ϕ (zie figuur 3). Deze hoeken geven informatie over waar de shower vandaan kwam (het is een vector van de shower-core tot de oorsprong). De richting van de shower is dus in tegengestelde richting. Om de hoeken θ en ϕ te kunnen bepalen, hebben we minimaal een drietal detectoren nodig dat betrokken is bij de coïncidentie. Op dit moment worden de hoeken alléén berekend bij een aantal van drie detectoren. Dit kan dus nog worden uitgebreid naar coïncidenties van meer dan drie detectoren. Meer hierover is te vinden op pagina 8.

Voor het bepalen van de hoeken θ en ϕ worden allereerst de x- en y- positie van detector 0 gekozen als oorsprong van het assenstelsel. Bovendien wordt de tijd waarop detector 0 een event gaf als t=0 genomen. Nu kunnen de relatieve afstanden dx_i, dy_i en de relatieve tijden dt_i van de andere betrokken detectoren worden bepaald, ten opzichte van detector 0.



Figuur 2: Schematische weergave van een shower. Aangezien de afstand x veel groter is dan de afstand y, wordt aangenomen dat y kan worden verwaarloosd.



Figuur 3: Assenstelsel met een inkomende shower

Zoals kan worden afgeleid uit figuur 3 hebben we de volgende gegevens:

$$\begin{aligned} \arctan\phi_i &= \frac{y_i}{x_i} \\ r_{0i} &= \sqrt{x_i^2 + y_i^2} \\ h &= r_{0i}\cos(\phi - \phi_i) \\ ct_i &= h\sin\theta \end{aligned} \tag{5}$$

Voor een coïncidentie met drie detectoren kunnen nu de volgende twee vergelijkingen worden opgesteld:

$$ct_1 = r_{01}\cos(\phi - \phi_1)\sin\theta \quad \text{met: } r_{01} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \tag{6}$$

$$ct_2 = r_{02}\cos(\phi - \phi_2)\sin\theta \quad \text{met: } r_{02} = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \tag{7}$$

Hieruit blijkt meteen waarom minimaal drie detectoren nodig zijn om de richting van de shower te bepalen: om twee onbekenden, θ en ϕ, te bepalen hebben we minimaal twee vergelijkingen nodig.

Bepaling van de hoek ϕ Vergelijkingen 6 en 7 kunnen nu worden opgelost waarbij waarden worden verkregen van de hoeken ϕ en θ. Allereerst leiden we de waarde van ϕ af door de onderste vergelijking te delen door de bovenste:

$$\begin{aligned} \frac{ct_2}{ct_1} &= \frac{r_{02}}{r_{01}}\frac{\cos(\phi - \phi_2)}{\cos(\phi - \phi_1)} \\ \frac{t_2}{t_1} &= \frac{r_{02}}{r_{01}}\frac{\cos\phi\cos\phi_2 + \sin\phi\sin\phi_2}{\cos\phi\cos\phi_1 + \sin\phi\sin\phi_1} \\ &= \frac{r_{02}}{r_{01}}\frac{\cos\phi_2 + \tan\phi\sin\phi_2}{\cos\phi_1 + \tan\phi\sin\phi_1} \\ (\cos\phi_1 + \tan\phi\sin\phi_1)\frac{t_2}{t_1} &= \frac{r_{02}}{r_{01}}(\cos\phi_2 + \tan\phi\sin\phi_2) \\ \cos\phi_1\frac{t_2}{t_1} - \frac{r_{02}}{r_{01}}\cos\phi_2 &= \tan\phi\sin\phi_2\frac{r_{02}}{r_{01}} - \tan\phi\sin\phi\frac{t_2}{t_1} \\ \tan\phi &= \frac{\cos\phi_1\frac{t_2}{t_1} - \frac{r_{02}}{r_{01}}\cos\phi_2}{\sin\phi_2\frac{r_{02}}{r_{01}} - \sin\phi_1\frac{t_2}{t_1}} \\ &= \frac{\cos\phi_1\frac{t_2}{t_1}\frac{r_{01}}{r_{02}} - \cos\phi_2}{\sin\phi_2 - \sin\phi_1\frac{t_2}{t_1}\frac{r_{01}}{r_{02}}} \end{aligned} \tag{8}$$

Als we nu invullen:

$$\begin{aligned} \sin\phi_1 &= \frac{y_1}{r_{01}} \quad & \cos\phi_1 &= \frac{x_1}{r_{01}} \\ \sin\phi_2 &= \frac{y_2}{r_{02}} \quad & \cos\phi_2 &= \frac{x_2}{r_{02}} \end{aligned} \tag{9}$$

Krijgt $\tan\phi$ de volgende vorm:

$$\begin{aligned}
\tan\phi &= \frac{\cos\phi_1 \frac{t_2}{t_1}\frac{r_{01}}{r_{02}} - \cos\phi_2}{\sin\phi_2 - \sin\phi_1 \frac{t_2}{t_1}\frac{r_{01}}{r_{02}}} \\
&= \frac{\frac{x_1}{r_{01}}\frac{t_2}{t_1}\frac{r_{01}}{r_{02}} - \frac{x_2}{r_{02}}}{\frac{y_2}{r_{02}} - \frac{r_{01}}{r_{02}}\frac{t_2}{t_1}\frac{y_1}{r_{01}}} \\
&= \frac{x_1 \frac{t_2}{t_1}\frac{1}{r_{02}} - \frac{x_2}{r_{02}}}{\frac{y_2}{r_{02}} - \frac{1}{r_{02}}\frac{t_2}{t_1} y_1} \\
&= \frac{x_1 t_2 - x_2 t_1}{y_2 t_1 - t_2 y_1}
\end{aligned} \tag{10}$$

Dit leidt tot de volgende vergelijking voor ϕ:

$$\phi = \arctan\left(\frac{dx_1 dt_2 - dx_2 dt_1}{dy_2 dt_1 - dy_1 dt_2}\right) \tag{11}$$

Dit is de vergelijking die op de website wordt gebruikt om de hoek ϕ te bepalen. Hierbij wordt gebruik gemaakt van een speciale arctan-functie van php (atan2) die ervoor zorgt dat de oplossing in het goede kwadrant komt.

Bepaling van de hoek θ Vervolgens wordt θ bepaald. Deze kan simpelweg worden bepaald uit vergelijking 6:

$$\begin{aligned}
ct_1 &= r_{01}\cos(\phi - \phi_1)\sin\theta \quad \text{met: } r_{01} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \\
\sin\theta &= \frac{ct_1}{r_{01}\cos(\phi - \phi_1)}
\end{aligned} \tag{12}$$

Als dt_1 ongelijk is aan nul, wordt dit gegeven door:

$$\theta = \left|\arcsin\left(\frac{c * dt_1}{\cos\phi * dx_1 + \sin\phi * dy_1}\right)\right| \tag{13}$$

Als dt_2 ongelijk is aan nul, wordt in plaats van vergelijking 6 vergelijking 7 gebruikt om θ te bepalen. θ wordt in dit geval gegeven door:

$$\theta = \left|\arcsin\left(\frac{c * dt_2}{\cos\phi * dx_2 + \sin\phi * dy_2}\right)\right| \tag{14}$$

Als beide gelijk zijn aan nul, worden θ en ϕ op nul gezet. De shower komt dan loodrecht van boven.

Tot slot worden de hoeken ϕ en θ worden omgerekend naar graden en weergegeven op de pagina die de gebruiker te zien krijgt.

Uitbreiding naar meer dan 3 detectoren Op dit moment wordt de richting van de shower alleen bepaald voor coïncidenties waar drie detectoren bij betrokken zijn. Dit zouden we eigenlijk willen uitbreiden naar coïncidenties waarbij drie of meer detectoren betrokken zijn. Hieronder zal ik stap voor stap doornemen wat in de berekening hierbij verandert en wat hetzelfde blijft.

Zoals te zien is op pagina 4 is de eerste stap in de richtingsbepaling het definiëren van een vlak door de (op dit moment) drie detectoren. Voor uitbreiding

naar meer detectoren moet in deze stap een vlak worden gedefinieerd door al deze detectoren.

De volgende stap in de bepaling van de richting is het opstellen van vergelijkingen van de vorm van formules 6 en 7, waaruit de hoeken θ en ϕ kunnen worden bepaald. We krijgen nu niet twee vergelijkingen maar $N - 1$ vergelijkingen van deze vorm, waarbij N het aantal detectoren is.

Voor het bepalen van de hoek ϕ zijn twee vergelijkingen nodig. Iedere combinatie van twee vergelijkingen kan hiervoor worden gebruikt en zou hetzelfde antwoord moeten opleveren. Eventueel zou ervoor kunnen worden gekozen om voor de nauwkeurigheid van alle combinaties van twee vergelijkingen de hoek ϕ te berekenen en hiervan het gemiddelde te nemen. Waarschijnlijk zal uit de verschillende berekeningen bijna dezelfde waarde voor ϕ komen en zal deze methode dus maar tot een kleine verbetering in de nauwkeurigheid leiden. Het zijn echter vergelijkingen die zonder veel gebruik van rekenkracht kunnen worden opgelost waardoor er weinig reden lijkt te zijn niet alle combinaties uit te rekenen.

Voor de bepaling van de hoek θ is maar één vergelijking nodig. Op dit moment wordt gekozen om vergelijking 6 te gebruiken, tenzij dt_1 gelijk is aan 0; in dat geval wordt vergelijking 7 gebruikt. Voor coïncidenties met meer dan 3 detectoren kan hetzelfde worden gedaan. Een andere optie is om θ voor alle beschikbare vergelijkingen van de vorm als formule 6 en 7 te gebruiken en vervolgens een gemiddelde waarde voor θ te bepalen. Ook hierbij geldt dat het berekenen van deze hoek weinig rekenkracht kost en het dus geen probleem lijkt te zijn uit alle vergelijkingen de hoek θ te bepalen en deze vervolgens te middelen.

3 Energiebepaling

Nu we de richting van de shower hebben gevonden, kan de energie van het primaire deeltje worden bepaald. Hiervoor hebben we niet alleen kennis nodig van de richting van de shower, maar ook van de positie van de showercore. Om redenen die straks duidelijk worden zal ik eerst uitleggen hoe deze primaire energie kan worden bepaald. In paragraaf 4 zal ik vervolgens beschrijven hoe de positie van de showercore kan worden bepaald.

Verschillende eigenschappen van de shower zijn afhankelijk van de energie van het primaire deeltje. Ten eerste de grootte van de shower: hoe hoger de primaire energie, hoe wijdser de shower zal zijn uitgestrekt. Ten tweede de muondichtheid: hoe hoger de primaire energie, hoe meer deeltjes er in de shower zullen zitten en hoe groter de muondichtheid dus zal zijn. Er is dus een verband tussen de energie van het primaire deeltje, de deeltjesdichtheid in een detector en de afstand r van deze detector tot de shower-core.

3.1 Bepaling van primaire energie bij AGASA

Het verband tussen deze grootheden moet empirisch worden bepaald. Een van de experimenten waarbij dit is gedaan is het AGASA-experiment in Japan. Dit experiment wordt beschreven in (Nagano & Watson, 2000). In het AGASA-experiment is het volgende verband gevonden (formule 24 uit Nagano en Watson):

$$S(r) = N_e C_e R^{-\alpha}(1+R)^{-(\eta-\alpha)}\left[1.0 + (\frac{r}{2000})^2\right]^{-0.6} \tag{15}$$

Hierbij is $S(r)$ gedefinieerd als: "the average energy loss in the scintillator of electrons, photons and muons, expressed in units of the energy loss of vertically penetrating muons." Verder worden de volgende variabelen gebruikt:

- N_e is gedefinieerd als het aantal geladen deeltjes (voornamelijk electronen)
- $R = \frac{r}{r_{mol}}$; r_{mol} is de Molière unit. Hiervoor wordt 91.60 genomen. r is de afstand van de detector tot de shower-core.
- α=1.2
- η=$3.97 - 1.79(\sec\theta - 1)$
- C_e is een normalisatieconstante.

Deze vergelijking heeft de vorm van de gegeneraliseerde Nishimura-Kamata-Greisen functie. Aanpassingen hierop zijn gedaan vanuit empirische overwegingen (zie ook (Greisen, 1960)).

Omdat showers vrijwel nooit van recht boven ons komen, moet worden gecorrigeerd voor de hoek θ waaronder de shower inkomt. Deze correctie wordt weergegeven door formule 36 uit Nagano en Watson:

$$S_0(600) = S_\theta(600) * \exp(-\frac{x_{obs}}{\lambda}(\sec\theta - 1) - \frac{x_{obs}}{\lambda_2}(\sec\theta - 1)^2) \tag{16}$$

Hierbij is:

- λ de "attenuation length of the observed quantity with atmospheric depth. λ depends on the detector type. In the case of scintillation detectors, S(600) is sensitive to low-energy electrons and photons. ... λ is determined from the zenith angle dependence of $D_0(600)$ under the assumption that the energy spectrum of primary particles observed does not depend on the zenith angle" (Nagano & Watson, 2000).

  Bij AGASA wordt gebruikt: $\lambda = 500 \pm 50$ g cm^{-2} voor $S(600)$.

- $\lambda_2 = 594^{270}_{120}$ g cm^{-2} voor zenith angles kleiner dan 50° en energieën tot 5x10^{19} eV.

- x_{obs} is de "atmospheric depth at the observation site."

  Bij AGASA wordt gebruikt: $x_{obs} = 920$ g cm^{-2}.

Vervolgens wordt in formule 27 van Nagano en Watson een verband gegeven tussen $S(600)$ en de energie van het primaire deeltje. Dit verband is verkregen op basis van simulaties met het COSMOS programma van Kasahara, Torii en Yuda:

$$E_0[\text{eV}] = 2.0 \times 10^{17} \times S(600)^{1.0}_{AG} \tag{17}$$

We kunnen ons afvragen waarom expliciet voor $S(600)$ wordt gekozen en niet voor een andere straal van de showercore af. Er lijkt een algemene consensus te zijn om hiervoor een straal van 600 te gebruiken. Op pagina 42 van (Sokolsky, 2004) wordt uitgelegd waarom hiervoor wordt gekozen.

De afstand die een primair deeltje in de atmosfeer aflegt alvorens een shower te creëren, kan fluctueren. De laterale distributie van de shower is hier echter wel van afhankelijk. Uit simulaties blijkt dat bij een afstand tussen 450 meter en 900 meter van de shower-as, de energie die we op zee-niveau meten vrijwel onafhankelijk is van de fluctuaties in de locatie van de primaire interacties.

Uitleg over correctieformule De volgende factor wordt gebruikt om te corrigeren voor het feit dat de showers vrijwel nooit van recht boven ons komen:

$$\exp(-\frac{x_{obs}}{\lambda}(\sec\theta - 1) - \frac{x_{obs}}{\lambda_2}(\sec\theta - 1)^2) \tag{18}$$

Hoe groter de hoek waaronder de shower inkomt, hoe meer moet worden gecorrigeerd. In (Sakaki et al., 2001a) wordt beargumenteerd dat de correctiefactor uit formule 18 corrigeert voor hoeken tot $\theta = 45°$. Als we willen corrigeren voor hoeken tot $\theta = 60°$, moet de volgende correctiefactor worden gebruikt:

$$\exp(-\frac{x'_{obs}}{\lambda'}(\sec\theta - 1) - \frac{x'_{obs}}{\lambda'_2}(\sec\theta - 1)^2 - \frac{x'_{obs}}{\lambda'_3}(\sec\theta - 1)^3) \tag{19}$$

In (Sakaki et al., 2001b,a) wordt uitgelegd hoe deze correctiefactor bepaald is. Dit is gebaseerd op de equi-intensity cut method. Hierbij wordt de logarithme van $S(600)$ als functie van $\sec\theta$ geplot bij verschillende intensiteiten. De experimenteel gevonden waarden worden nu vergeleken met op drie manieren verkregen voorspelde waarden: uit de formule zonder correctiefactor, de formule met de correctieformule 18 en de formule met correctiefactor 19. Hieruit blijkt dat het gebruik van een correctiefactor leidt tot een betere overeenkomst met de experimentele waarden. Bovendien blijkt dat met correctiefactor 19 de curve ook bij hogere waarden voor $\sec\theta$ (en dus bij hogere waarden van θ) overeenkomt met de experimentele waarden.

3.2 Bepaling van primaire energie bij HiSPARC

In de bepaling van de energie van het primaire deeltje bij het HiSPARC-project, wordt gebruik gemaakt van bovenstaande drie formules uit Nagano en Watson. In andere experimenten zijn andere formules gevonden, maar er is gekozen die van AGASA te gebruiken voor HiSPARC omdat het AGASA-experiment één van de experimenten is die het meest lijkt op het HiSPARC-experiment: ook hier wordt gebruik gemaakt van scintillatorplaten om de deeltjes te detecteren.

Het AGASA-experiment wordt uitgevoerd in Akeno, Japan, dat 200 meter boven zeeniveau ligt. Dit experiment wordt dus op een veel grotere hoogte uitgevoerd dan het HiSPARC-experiment. Uit simulaties blijkt dat het aantal deeltjes op zeeniveau grofweg gehalveerd is. $S(600)$ is dus een factor twee lager dan bij AGASA. Om deze reden wordt formule 17 voor de HiSPARC-berekeningen aangepast tot:

$$E_0[\text{eV}] = 4.0 \times 10^{17} \times S(600) \tag{20}$$

Verder geldt dat:

$$\begin{aligned} S(r) &= kR^{-\alpha}(1+R)^{-(\eta-\alpha)}\left[1.0+(\frac{r}{1000})^2\right]^{-0.6} \\ &= k(\frac{r}{r_{mol}})^{-\alpha}(1+\frac{r}{r_{mol}})^{-(\eta-\alpha)}\left[1.0+(\frac{r}{1000})^2\right]^{-0.6} \\ &= k\hat{S}(r) \end{aligned} \tag{21}$$

Deze formule is dus vrijwel gelijk aan formule 15 met $k = N_e C_e$. Het enige verschil is dat in deze formule gedeeld wordt door 1000, terwijl in formule 15 wordt gedeeld door 2000. Dit is gebaseerd op een artikel gepubliceerd door onderzoekers van AGASA uit 1994 (Yoshida et al., 1994). Het is niet helemaal zeker of 1000 of 2000 moet worden gekozen. De keuze heeft in ieder geval maar een kleine invloed op de verdeling van $S(r)$.

Het aantal deeltjes door een vierkante meter van de detector wordt gegeven door:

$$n_i = k\hat{S}(r_i) \tag{22}$$

Hierbij is n_i het aantal MIPs (minimum ionizing particles) dat kan worden ingegeven in het invoerscherm; r_i wordt gegeven door:

$$r_i = \sqrt{(dx^2+dy^2)*\cos^2\theta + (dx\sin\phi - dy\cos\phi)^2 * \sin^2\theta} \tag{23}$$

Nu kan het volgende worden geconcludeerd:

$$\begin{aligned} E_0[\text{eV}] &= 4.0 \times 10^{17} \times S(600) \\ &= 4.0 \times 10^{17} \times k\hat{S}(600) \\ &= 4.0 \times 10^{17} \times \frac{n_i}{\hat{S}(r_i)}\hat{S}(600) \end{aligned} \tag{24}$$

In principe geeft $\frac{n_i}{\hat{S}(r_i)}$ voor iedere detector hetzelfde resultaat. Om kleine variaties hierin op te vangen, wordt de gemiddelde waarde hiervoor van alle detectoren gebruikt. De primaire energie wordt dus op de volgende manier bepaald:

$$E = 4.0 \times 10^{17} \times \frac{1}{N_i}\sum_i \frac{n_i}{\hat{S}(r_i)}\hat{S}(600) \tag{25}$$

Hierbij worden de volgende waarden gebruikt:

- De Molière unit wordt 91.60 genomen, gelijk aan de waarde die is gebruikt bij het AGASA-experiment. De Molière unit is afhankelijk van de air density welke verandert als functie van temperatuur en druk. In (Greisen, 1960) wordt beargumenteerd dat op zeeniveau een goede waarde voor de Molière unit 79 meter is. Het AGASA-experiment ligt relatief hoog, dus daar is de Molière unit hoger. Een realistischere waarde voor de Molière unit in het HiSPARC-experiment is dus 79 meter in plaats van 91.60.

- Voor η wordt genomen: 3.84. Het gebruik van η onafhankelijk van de hoek θ levert een fout van $\pm 10\%$, afhankelijk van de hoek θ (Yoshida et al., 1994).

- Voor α wordt genomen: 1.2, gelijk aan de waarde gebruikt bij AGASA.

- Voor λ wordt genomen: 500 g cm^{-2}, gelijk aan de waarde gebruikt bij AGASA.

- Voor λ_2 wordt genomen: 594 g cm^{-2}, gelijk aan de waarde gebruikt bij AGASA.

- Voor x_{obs} wordt genomen: 920 g cm^{-2}. Op zeeniveau, bij hoeken van $\theta = 55°$, is de atmospheric depth gelijk is aan 1800 g cm^{-2} (Greisen, 1960). In een nieuwe versie van de berekeningen lijkt het dus handig een hogere waarde te nemen voor x_{obs}; wat deze waarde precies is moet nog nader worden bekeken.

Zoals uit bovenstaande berekening blijkt wordt er in de berekening van de energie geen correctie meegenomen voor de hoek θ waaronder de shower inkomt. In een verbeterde versie van de berekeningen is het sterk aan te bevelen dit wel te doen.

4 Bepaling van de positie van de showercore

4.1 Bepaling van de positie van de showercore: theorie

De positie van de showercore wordt bepaald door gebruik te maken van de kleinste kwadraten methode. Hierbij wordt de χ^2 van de energie geminimaliseerd. Deze χ^2 heeft verschillende waarden bij verschillende waarden van de positie van de core. Gezocht wordt naar de positie van de showercore waar de χ^2 van de energie minimaal is. Op basis van deze minimalisatiemethode vinden we dus zowel de positie van de showercore als de energie van het primaire deeltje.

De definitie van χ^2 is (de Wolf, 2007, p. 87):

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(y_i^{exp} - y_i^{theory})^2}{\sigma_i^2} \tag{26}$$

Wat de verschillende componenten in deze formule betekenen is te vinden vanaf pagina 15.

De minimalisatiemethode Amoeba Omdat de energie van het primaire deeltje afhankelijk is van de positie van de showercore, bevat de functie χ^2 twee onafhankelijke variabelen, namelijk de x- en de y-positie van de showercore. Om deze reden is voor het minimaliseren van deze functie een minimalisatiemethode nodig die geschikt is voor functies met meer dan 1 onafhankelijke variabele. De minimalisatiemethode die op dit moment wordt gebruikt, is de downhill simplex methode van Nelder en Mead (Press *et al.*, 1986). Bij het testen van de code is het echter nuttig verschillende minimalisatiemethodes te vergelijken zodat kan worden bepaald welke voor onze toepassing de nauwkeurigste uitkomsten geeft.

In de minimalisatiemethode van Nelder en Mead, Amoeba genaamd, wordt gebruik gemaakt van simplexen. Een simplex is een geometrisch figuur dat in N dimensies uit $N+1$ punten bestaat plus de lijnstukken die deze punten verbinden. Voor het minimaliseren van een functie met N onafhankelijke variabelen wordt in de downhill simplex methode gebruik gemaakt van een simplex in N dimensies. In het geval dat we de χ^2 van de energie proberen te minimaliseren, wordt dus gebruik gemaakt van een simplex in twee dimensies. In twee dimensies is een simplex een driehoek.

In de downhill simplex methode wordt allereerst op basis van een slimme gok een simplex gekozen waarmee zal worden begonnen. Vervolgens worden verschillende operaties uitgevoerd op de simplex: reflecties, expansies en contracties. Door een slimme reeks van deze operaties uit te voeren, is het mogelijk het minimum van de functie te bepalen.

Het is belangrijk dat er criteria worden gedefinieerd wanneer het minimalisatieproces moet stoppen. Er zijn twee manieren waarop dit kan worden gedaan. De manier waarvoor in het HiSPARC-script is gekozen is het definiëren van een fractional tolerance. Hierbij wordt de functie gestopt als de verlaging in de waarde van de functie lager is dan een bepaalde fractional tolerance (er is gekozen voor 1×10^{-10}).

Omdat er een kleine kans is dat op een ander punt dan rond het minimum wordt voldaan aan bovenstaand criterium, kan het voorkomen dat de routine te vroeg wordt afgebroken. Om deze reden is het vaak een goed idee om herstarts in de routine op te nemen. Hierbij wordt de routine opnieuw gestart rond het

gevonden minimum om te testen of dit minimum nog een keer wordt gevonden. Hoe meer herstarts er worden gebruikt hoe waarschijnlijker het wordt dat we echt met het minimum van de functie te maken hebben. Op dit moment wordt er in de HiSPARC-berekeningen geen gebruik gemaakt van herstarts.

4.2 Bepaling van de positie van de showercore bij HiSPARC

Om de positie van de showercore te bepalen wordt op de website gebruik gemaakt van de hierboven beschreven methode. In deze paragraaf zal ik de daadwerkelijke implementatie van deze methode bespreken.

Allereerst worden dx en dy hergedefinieerd: dit zijn nu de afstanden x en y van de detectoren naar de shower-core. Vervolgens wordt, zoals hierboven beschreven, χ^2 van de energie gegeven door:

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(y_i^{exp} - y_i^{theory})^2}{\sigma_i^2} \tag{27}$$

Aangezien we in ons geval te maken hebben met de χ^2 van de energie, is:

- y_i^{exp} de experimenteel bepaalde energie van het primaire deeltje.
- y_i^{theory} de theoretisch bepaalde energie. Deze kan worden bepaald uit vergelijking 25.
- σ_i^2 de variantie. De variantie is een maat voor de "breedte" van een verdeling. Het is ook het kwadraat van de fout σ_i in de meting.

Als we de χ^2 op deze manier zouden willen bepalen, komen we echter een probleem tegen: de energie van het primaire deeltje kan niet worden gemeten en dus is y_i^{exp} niet te bepalen. We meten wel de muondichtheid en er zit een direct verband tussen de muondichtheid en de primaire energie volgens formule 25. Een betere keuze is dus om de muondichtheid te minimaliseren. Hierbij is:

- y_i^{exp} de experimenteel gemeten muondichtheid.
- y_i^{theory} de theoretisch bepaalde muondichtheid. Deze kan worden bepaald uit vergelijking 21.
- σ_i^2 nog steeds de variantie. Het is nu het kwadraat van de fout σ_i in de meting van de muondichtheid.

Ook wordt een tweede aanpassing gedaan. Uit praktische overwegingen minimaliseren we niet de muondichtheid maar de muondichtheid van een detector relatief tot een andere. Hiertoe nemen we, net als in paragraaf 2, een bepaalde detector als detector 0 en noemen we het event dat hij registreert event 0. We kijken nu naar de theoretisch voorspelde en experimenteel bepaalde waarden van de muondichtheid van event 0 gedeeld door die van event i. y_i^{exp} en y_i^{theory} hebben nu de volgende vorm:

$$y_i^{exp} = n_{0i} = \frac{n_0}{n_i} = \frac{\text{Average density of muons in event 0}}{\text{Average density of muons in event i}} \tag{28}$$

$$y_i^{theory} = x_i = \frac{S(r_0)}{S(r_i)} = \frac{k\hat{S}(r_0)}{k\hat{S}(r_i)} = \frac{\hat{S}(r_0(x_k, y_k))}{\hat{S}(r_i(x_k, y_k))} \tag{29}$$

Hierbij zijn x_k en y_k de x- en y-posities van de showercore. In bovenstaande formules heb ik ervoor gekozen y_i^{exp} te herdefiniëren als n_{0i} en y_i^{theory} als x_i, omdat dit dichterbij de in de code gebruikte notatie komt.

Verder moet de variantie worden bepaald. Oftewel, we moeten de fout in de meting van de deeltjesdichtheid bepalen en hier het kwadraat van nemen. De variantie bestaat uit het kwadraat van verschillende componenten van de meetfout (formule 34 van (Nagano & Watson, 2000)):

$$\sigma_t^2 = \sigma_{det}^2 + \sigma_{res}^2 + \sigma_{stat}^2 \tag{30}$$

Hierbij is σ_{stat} de statistische fout; σ_{det} is de fout in de meting van de detectoren; σ_{res} representeert de resterende fouten, zoals de fluctuaties in de longitudinale ontwikkeling van de shower.

Voor het AGASA-experiment is de formule voor deze fout experimenteel bepaald (Teshima et al., 1986):

$$\sigma_S^2 \sim 1.0S + (aS)^2 + (\sqrt{S})^2 = 2S + a^2S^2 \tag{31}$$

Bij AGASA is een waarde van a gevonden van $a = 0.25 \pm 0.05$.

Omdat we niet naar de deeltjesdichtheid van één event kijken maar de verhouding tussen die van event 0 en event i, hebben we ook niet de fout in de meting van de deeltjesdichtheid van één event nodig maar moet ook hierbij de fout in de meting van event 0 worden gedeeld door de fout in de meting van event i:

$$\sigma_{0i}^2 = \frac{\sigma_{S(r_0)}^2}{\sigma_{S(r_i)}^2} = \frac{2\hat{S}(r_0) + a^2\hat{S}(r_0)^2}{2\hat{S}(r_i) + a^2\hat{S}(r_i)^2} \tag{32}$$

In de berekeningen van de fout op de website wordt aangenomen dat de statistische fouten 0 zijn, oftewel dat $a = 0$. De foutwaarde die dus in de HiSPARC-berekeningen wordt gebruikt is:

$$\sigma_{0i}^2 \sim \frac{2\hat{S}(r_0)}{2\hat{S}(r_i)} = \frac{\hat{S}(r_0)}{\hat{S}(r_i)} = x_i \tag{33}$$

In de praktijk lijkt het onwaarschijnlijk dat de statistische fouten inderdaad nul zijn. In een volgende versie van de berekeningen is het dus aan te raden hier een realistischere waarde voor te kiezen.

Als we deze bovenstaande dingen samenvoegen komen we tot de volgende vergelijking voor de χ^2 van de energie:

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \sum_i \frac{(y_i^{exp} - y_i^{theory})^2}{\sigma_i^2} \\ &= \sum_i \frac{(n_{0i} - x_i)^2}{x_i} \end{aligned} \tag{34}$$

Downhill simplex methode bij HiSPARC Zoals ik hierboven heb uitgelegd, wordt de downhill simplex methode op de website gebruikt om de minimale χ^2 van de energie/muondichtheid te vinden. Deze is afhankelijk van de positie van de showercore, oftewel van xcore en ycore. We hebben dus een functie van 2 onafhankelijke variabelen die geminimaliseerd moet worden. Hierbij is N dus 2 en hebben we te maken met een simplex in twee dimensies, oftewel een driehoek.

De downhill simplex methode wordt uitgevoerd door een aantal functies die in elkaar worden aangeroepen. Begonnen wordt met de functie genaamd calc_energie. Kort samengevat bepaalt deze functie een aantal waarden die nodig zijn om een beginsimplex te definiëren en roept vervolgens de functie minimize aan. Op basis van de gegevens die deze functie minimize teruggeeft, bepaalt de functie calc_energie de positie van de showercore en de energie van het primaire deeltje.

Omdat een simplex moet worden gekozen waarmee de methode kan worden begonnen, wordt om te beginnen in de functie calc_energie een eerste gok gedaan voor xcore en ycore. Hierbij wordt de gemiddelde x-waarde van de detectoren genomen als de gok voor de xcore en de gemiddelde y-waarde van de detectoren voor de ycore. Er wordt dus gegokt dat de showercore zich precies tussen de 3 detectoren bevindt. Verder wordt een scale gedefinieerd (xscale en yscale). Deze is gelijk aan het verschil tussen de hoogste x dan wel y en de laagste x danwel y gedeeld door 100.

Vervolgens wordt de functie minimize aangeroepen. Kort samengevat wordt in deze functie minimize allereerst een beginsimplex gedefinieerd. Vervolgens wordt de functie Amoeba aangeroepen om operaties op deze simplex uit te voeren. De functie Amoeba geeft uiteindelijk een eindsimplex rond het minimum terug, waar de functie minimize een gemiddelde x en y waarde uit bepaald. Bij de aanroep van de functie minimize worden meegegeven: de eerste gok van de posities xcore en ycore, de xscale en yscale en N (hiervoor wordt het getal 2 gebruikt, omdat we te maken hebben met een functie van twee onafhankelijke variabelen).

In de functie minimize wordt allereerst de simplex gedefinieerd waarmee wordt begonnen. Deze wordt gedefinieerd als een (N+1)xN matrix. Hierbij bevindt het punt P_0 zich op de positie van de geschatte xcore en ycore. De andere twee punten bevinden zich op respectievelijk (xcore+xscale, ycore) en (xcore, ycore+yscale). De matrix P ziet er dus als volgt uit:

$$P = \begin{pmatrix} P_{2,x} & P_{2,y} \\ P_{1,x} & P_{1,y} \\ P_{0,x} & P_{0,y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{xcore}_{gok} + \text{xscale} & \text{ycore}_{gok} \\ \text{xcore}_{gok} & \text{ycore}_{gok} + \text{yscale} \\ \text{xcore}_{gok} & \text{ycore}_{gok} \end{pmatrix}$$

Vervolgens wordt een vector y aangemaakt die de χ^2 van ieder punt van de simplex bepaalt. De vector y ziet er dus als volgt uit:

$$y = \begin{pmatrix} \chi^2(P_0) \\ \chi^2(P_1) \\ \chi^2(P_2) \end{pmatrix}$$

Nu roept de functie minimize de functie Amoeba aan. De argumenten die worden meegegeven zijn: de simplex P, de array y, de dimensie N (weer gelijk aan 2 dus), ftol en nfunc. Zoals in paragraaf 4.1 uitgelegd, wordt met ftol een

criterium meegegeven wanneer de minimalisatie moet stoppen; nfunc geeft het aantal functie-evaluaties weer en wordt aan het begin van de functie Amoeba op 0 gezet.

Nu laten we de functie Amoeba zijn gang gaan met de simplex. Deze wordt gereflecteerd, geëxpandeerd en gecontraheerd totdat een heel kleine simplex rond het minimum van de functie overblijft. Voor het reflecteren en het vergroten/verkleinen van de simplex maakt de functie Amoeba gebruik van de functie Amotry. De contractie rond het minimum wordt door de functie Amoeba zelf gedaan. Via een specifieke reeks van deze operaties op de simplex wordt het minimum van de functie χ^2 bepaald.

Uit de functie Amoeba krijgen we een heel kleine simplex rond het minimum terug. De functie minimize berekent nu de gemiddelde x- en y- posities van de punten van de simplex, oftewel het midden van deze simplex. Tot slot geeft de functie minimize de volgende waarden terug aan de functie calc_energie: de verkregen x- en y-posities en nfunc, het aantal functie-evaluaties dat nodig was om tot dit antwoord te komen.

Nu de functie minimize zijn waarden heeft gereturnt, kan de functie calc_energie verder met het bepalen van de waarde van xcore en ycore en van de energie van het primaire deeltje. Uit de functie minimize zijn weliswaar posities x- en y- gekomen waar χ^2 van de energie minimaal is, maar deze x- en y- posities zijn relatief tot de positie van detector 0 omdat een assenstelsel was gekozen waarbij deze detector in de oorsprong stond. Hier voor moet dus nog worden gecorrigeerd op de volgende manier:

$$\begin{aligned} \text{xcore} &= \text{xdet}[0] + \text{res}[x] \\ \text{ycore} &= \text{ydet}[0] + \text{res}[y] \end{aligned} \tag{35}$$

Tot slot bepaalt de functie calc_energie de energie van het primaire deeltje. Allereerst wordt de functie Ls aangeroepen om de afstand van de detector tot de showercore te berekenen. Vervolgens wordt de functie calc_shat_r aangeroepen met als argument de verkregen afstand om het volgende te berekenen:

$$S(r) = (\frac{r}{R_{mol}})^{-\alpha}(1 + \frac{r}{R_{mol}})^{-(\eta-\alpha)} \left[1.0 + (\frac{r}{1000})^2\right]^{-0.6} \tag{36}$$

waarbij r nu de berekende afstand van de detector tot de showercore is. Nu wordt de gemeten deeltjesdichtheid gedeeld door $S(r)$. In principe komt hier voor alle detectoren (ongeveer) dezelfde waarde uit maar voor de nauwkeurigheid wordt hiervan het gemiddelde genomen. Nu wordt de energie van het primaire deeltje bepaald door:

$$E = 4 \times 10^{17} S(600) \frac{1}{N} \sum_N \frac{\text{dens}[i]}{S}(r_i) \tag{37}$$

Uitbreiding naar meer dan 3 detectoren Bovenstaande berekening is gemakkelijk uit te breiden naar meer dan 3 detectoren. Ook hierbij kan aan het begin van de code één van de detectoren als detector 0 genomen worden. Vervolgens kan het gemiddelde van alle x- en y- posities van de detectoren als eerste gok voor de positie van de showercore worden genomen.
Vanuit dit gemiddelde in combinatie met de xscale en yscale kan in principe de hele minimalisatieprocedure ongewijzigd worden doorlopen. Het is echter wel

nodig de code goed te controleren omdat er nu aannames zijn gedaan die voor meer detectoren niet meer geldig zijn. Een voorbeeld hiervan is dat er in de code op sommige punten niet gebruik wordt gemaakt van een variabele “aantal detectoren”, maar van een getal 3.

5 Conclusie

In dit document heb ik geprobeerd op een begrijpelijke manier uit te leggen hoe op dit moment op de HiSPARC-website coïncidenties kunnen worden geanalyseerd. In deze analyse wordt de richting van de inkomende shower bepaald, de positie van de showercore en de energie van het primaire deeltje. Op dit moment is het alleen mogelijk deze analyse uit te voeren voor coïncidenties waar drie detectoren bij betrokken waren.

Behalve dat ik me heb gericht op het uitzoeken hoe deze analyse precies wordt gedaan, heb ik ook gekeken naar mogelijkheden om deze analyse mogelijk te maken voor coïncidenties met meer dan 3 detectoren. Dit zou zonder grote aanpassingen op de huidige berekeningen mogelijk moeten zijn. Eerder in dit document is te vinden welke kleine wijzigingen hier precies voor nodig zijn.

Verder heb ik kritisch gekeken hoe de analyse kan worden verbeterd. Vooral bij de berekening van de energie van het primaire deeltje lijkt verbetering mogelijk. Ik zal hier de twee belangrijkste verbeterpunten kort bespreken.

Ten eerste is er uit het AGASA-experiment een formule bekend die een correctiefactor geeft voor het feit dat showers vrijwel nooit van recht boven ons komen maar bijna altijd onder een bepaalde hoek inkomen. In de code van de HiSPARC-website is wel een functie aangemaakt die deze correctiefactor berekent, maar deze functie wordt in de code nergens aangeroepen. Door deze wel aan te roepen is de berekening makkelijk een stuk te verbeteren.

Een tweede punt is dat er in de berekening van de energie een aantal fysische waarden moeten worden ingevuld in de formules die bekend zijn uit het AGASA-experiment. Op dit moment zijn de meest van deze waardes overgenomen van dit experiment, maar in sommige gevallen is het logischer andere waarden te kiezen, bijvoorbeeld omdat Akena in Japan veel hoger ligt dan Nederland.

Door op deze twee punten verbeteringen door te voeren is het hopelijk mogelijk om een betere berekening te maken van de energie van het primaire deeltje.

Referenties

de Wolf, E. 2007. *Syllabus Statistical Data Analysis.*

Greisen, K. 1960. Cosmic Ray Showers. *Annual Review of Nuclear and Particle Sciences*, **10**, 63–108.

Nagano, M., & Watson, A.A. 2000. Observations and implications of the ultrahigh-energy cosmic rays. *Reviews of Modern Physics*, **72**(3), 689.

Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T., & Flannery, B.P. 1986. *Numerical Recipes, the Art of Scientific Computing.* 3rd edn. Cambridge University Press.

Sakaki et al., N. 2001a. Cosmic Ray Energy spectrum above 3×10^{18} eV observed with AGASA. *Proceedings of ICRC 2001*, 333.

Sakaki et al., N. 2001b. Energy estimation of AGASA events. *Proceedings of ICRC 2001*, 329.

Sokolsky, P. 2004. *Introduction to Ultrahigh Energy Cosmic Ray Physics.* Westview Press.

Teshima et al., M. 1986. Properties of $10^9 - 10^{10}$ GeV extensive air showers at core distances between 100 and 300 m. *Journal of Physics G*, **12**, 1097.

Yoshida et al., S. 1994. Lateral distribution of charged particles in giant air showers above 1 EeV observed by AGASA. *Journal of Physics G: Nuclear Particle Physics*, **20**, 651–664.